113. 群ニツイテノ二、三ノ注意

東北大　　増田　勝彦

昨年マデ正田先生ノ代数学通論ノデナイコロデシタ。淡中先生ノ御指導デ Ringtheorem ト群論トノ関係ヲ学ンデ得タ結果ヲ若干手ヲイレテ以下ニシルシマシタ。

群ト環トヲデキルダケ平行ニトリアツカッテ Wedderburn ノ定理アタリマデクミタテヨウトシタノデシタガ環ニツイテハ常ニ環自体トシテ考エタ方ガ簡単ニ証明サレカツ結果モヨクナルノデソチラハ省略シマス。シタガッテ群ノ方モ興味本位ノモノニシカスギナクナリマシタガ万一ナニカ興味デモアッタラトオモッテカキトメマシタ。誤ガナケレバヨイガト思ッテイマス。

群ノ公理ハ次ノ形ニノベラレテヰル。

1)　$a \cdot b = c$

2.) $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$

3.) スクナクモ一ツ左単位元ガ存在スル。コレヲ e トカク。

4.) 各元 a = $a^{-1}a = e$ ナル a^{-1} ガ存在スル

コレカラ ヨクシラレテルヨウニ e ガ右単位元デアルコト及ビ唯一ノ単位元ナルコト等ガデテクル。今 3 ノ左ヲ右ニカエテ

3*) スクナクモ一ツ右ニ単位元ガ存在スル。ソノ一ツヲ e トスル

トシ コノ 3* ト

4*) 各元 $a = a^{-1}a = e$ ニナル左 逆元ガ少クモ一ツ存在スル。

1) 2) 3*) 4*) ヲ満足スル空デナイ集合ヲソノ積ノ関係ヲ含メテ S－群ト名ツケテ、コノS群ノ構造ヲシラベル。

注意。右単位元ガ e. e', ……ノ如クイクツカアルデアラウ。ソレニ対シテ a ノ左逆元ガ存在シタラ、コレヲ a_e^{-1}, $a_{e'}^{-1}$ ……ト表ス。 4* デ a_e^{-1} ガ存在スルカラ任意ノ e' ニツイテ $a_{e'}^{-1}$ ハ存在スル。ソレハ $e'a_e^{-1}$ デアル

$$e'a_e^{-1}\ a = e'e = e'$$

1、S群ノ構造

定理 1 　S群 γ ヲ集合ト考エル時ニハMトカクコトニスルト

$M = M_1 + M_2 + \cdots\cdots$ 　（集合トシテノ直和）

ナ M_i ハ各群ヲナシ。ソレニ属スルS群ノ右単位元ニヨリ一意ニ代表サレ且且ニ群トシテ同型デアル。

即チ各元ニツイテソレヲ含ム群ガキマリ。ソレガ同型ニナル。

定理 2. シタガッテ右単位元ガ唯一ナラバS群ハ群ニナル。

定理 3 　S群 γ 内デ M_i ノナス群（ソレヲ γ_i トカク）

γ_i ハ *Maximal* ナ群デアリ γ 内ノ *Maximal* ナ群ハ此ズ上ノ集合ノ直和ヘノ分解ニデテクルアル M_j ノ *element* ノナス群デアル。

證明 1) 右単位元 e ヲトリ ex. 但シ $x \in \gamma$ ノ形ニカケル元全部ノ集合ハ群ヲナス。コレヲ $e\gamma$ トカク

$$\because\ ee = e\ e\ e\gamma \qquad e \cdot ex = ex \quad (\text{左単位元})$$

$$ex_e^{-1} \cdot ex = e \cdot x_e^{-1}x = ee = e \qquad (\text{左逆元})$$

$$ex \cdot ex' = exx' \in e\gamma$$

ii) 二ツノ右単位元 e e' ニツイテ $e\gamma$ ト $e'\gamma$ トハ $e=e'$ ノ時ニハ明ニ一致スルガ $e\neq e'$ ナラバ共通元ヲモタナイ.

$\because$ 今 $e\gamma \cap e'\gamma$ ガ空デナクワアル元 x ヲモツタナラ

$$x = ex = e'x \qquad x\gamma = ex\cdot\gamma = e(ex\cdot e\gamma)$$

$$= e\cdot e\gamma = e\gamma \quad 又 \quad x\gamma = e'x\cdot\gamma = e'(e'x\cdot e'\gamma)$$

$$= e'\cdot e'\gamma = e'\gamma \qquad \therefore e\gamma = e\gamma$$ シカラバ群トシテノ単位元ノ唯一性カラ $e = e'$

iii) S群 γ ノ任意ノ元 x ヲ含ム $e'\gamma$ ノ形ノ群ガ存在スル. ソレハ $x = e_1 y$ ノ形ニカケルコトヲシメセバヨイ. 今任意ニ一ツ右単位元 $\bar{e}$ ヲトツテクル. 注意1ニヨリ $x^{-1}_{\bar{e}}$ ガ存在スルガ $\bar{e}\gamma$ ガ群ナルコトヲ用イテ $\bar{e} = x^{-1}_{\bar{e}}\cdot\bar{e}x = \bar{e} = \bar{e}x\cdot\bar{e}x^{-1}_{\bar{e}} = \bar{e}\cdot x x^{-1}_{\bar{e}}$ サテ γ ノ任意ノ元 a ニ対シテ

$$a x\, x^{-1}_{\bar{e}} = a\bar{e}\cdot x x^{-1}_{\bar{e}} = a\bar{e} = a$$

$\therefore x x^{-1}_{\bar{e}}$ ハ右単位元 コレヲ e' トカク.

$$x x^{-1}_{\bar{e}}\, x = e'x = x\cdot x^{-1}_{\bar{e}} x = x\bar{e} = x$$

$$\therefore x \in e'\gamma$$

ヨツテ定理 1. 2 ガ證明サレタ.

M_i ノ形ハ $e_i\gamma$ デアルコトヲ考エテ定理 3ヲ導ク.

今群 $H \supset e\gamma$ ナラバ 任意ノ $x \in H$ ナル x ニツイテ定理2ニヨツテ $x \in e\gamma$ ナル e' ガ存在スル. コノ内ノ x ノ逆元ヲトル. コレヲ $x^{-1}_{e'}$ トスル.

$$x\cdot x^{-1}_{e'} = e' = (x\cdot e)x^{-1} = x\cdot e x^{-1}_{e'}$$

$$\therefore e' \in x\cdot e\gamma \overset{e'}{\subset} H$$

$\therefore e' \in H$ 群 H ノ右単位元ハ唯一ダカラ $e = e'$ $\therefore x \in e\gamma$

$$\therefore H \subset e\gamma \qquad \therefore H = e\gamma$$

次ニ γ 内ニ *Maximal group* K ガアルトスル. コレノ単位元ヲ e_1 トスルト $K = e_1 K \subset e_1\gamma$ シカシマダ e_1 ガ γ ノ右単位ガドウカワカラナイ. タガ e_1 ニ対シテ $e_1 \in e'\gamma$ ナル e' ガ存在スル.

$\therefore K \subset e_1\gamma \subset e'\gamma\gamma = e'\gamma$ 右辺ガ *group* デ K ガ *Maximal* ナルコトカラ $K_1 = e'\gamma$

2. S群ノ存在及ビソノ形ノ決定

A) S群ハ実際ニクミタテラレル　集合 $E=\{\sigma, \tau \cdots\}$ ニツイテ積ヲ $\sigma\tau=\sigma$ デ定メルト準群ガデキル。コノ形ノ準群ヲE準群トヨブコトニスル。

定理4　左単位元ノナス集合ヨリナルE準群ト群 G トヲ与エラレタ時ニモツS群ハ存在シ Isomorph ヲ等シイトカンガエレバ唯一ニキマル。

$$E = \{\sigma, \tau, \cdots\cdots\cdots\}$$
$$H = \{h, k, \cdots\cdots\cdots\}$$

(σ, h) ナル クミニ積ヲ

$$(\sigma, h)(\sigma', h') = (\sigma\sigma', hh') = (\sigma, hh')$$

トスレバS群ニナリ、ミトムル形ニナツテルコトハ明　以下略

例1.　$E=(\sigma, \tau)$　　$H=(1, (12))$

	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a
c	c	d	c	d
d	d	c	d	c

例2　$E=(\sigma)$　　$H=(1, (12))$ 群ニナル。

	a	b
a	a	b
b	b	a

定理　S群ハ右単位元ノ濃度ト群 G デ完全ニキマル。

以上デ目的トスル群論ヲ終リマシタ。ステニキヅカレタ通リ Wedderburn 定理ノ analogie デス。コレヲ用イテクミタテタ理論ハ四ニノベタ理由デハブキマスガ一例ヲアゲマストホボ次ノヨウニモデキマス。

Ring $\mathfrak{O}$ = Mrisimal ナ左イデアルガ存在シ $\mathfrak{l}^2 \neq 0$ シタガツテ $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$ トスル。スルトヨクシラレタ Artin ノ方法デ $\mathfrak{l}$ 内ニ Körper ($\ni e$) ガ含マレ且コレガ Maximal körper ナルコト(定理3)ガイエマス。モシコノ Körper (Schief Körper) ニツイテ $\mathfrak{l}$ ガ有限次ナラコレデ $\mathfrak{O}$ ガ Matrix ニ単純ニナルカラ、サラニモシ $\mathfrak{O}$ ガ Simpl ナラ同型ナ表現ニナル。

以上　誤其ノ他オキヅキノ点ガアリマシタラオシラセ下サイ。

（仙台　　6月 4日）